ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 25 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΦΥΣΙΚΗ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 – γ
Α2 – γ
Α3 – δ
Α4 – δ
Α5 α – Λ, β – Λ, γ – Σ, δ – Σ, ε – Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.α. Σωστό το ii)

β. Η συχνότητα f_1 που ανιχνεύει ο δέκτης που κινείται στον αέρα με ταχύτητα μέτρου υ_1 και με φορά προς την ηχητική πηγή είναι:

$$f_1 = \frac{\upsilon_\alpha + \upsilon_1}{\upsilon_\alpha} f_s \quad (1)$$

Η συχνότητα f_2 που ανιχνεύει ο δέκτης που κινείται στο νερό με ταχύτητα μέτρου υ_2 και με φορά προς την ηχητική πηγή είναι:

$$\left.\begin{array}{l} f_2 = \dfrac{\upsilon_\nu + \upsilon_2}{\upsilon_\nu} f_s \\ \text{Αλλά } \upsilon_\nu = 4\upsilon_\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow f_2 = \frac{4\upsilon_\alpha + \upsilon_2}{4\upsilon_\alpha} f_s \quad (2)$$

Επειδή οι συχνότητες f_1 και f_2 δόθηκαν ίσες έχουμε:

$$f_1 = f_2 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \frac{\upsilon_\alpha + \upsilon_1}{\upsilon_\alpha} f_s = \frac{4\upsilon_\alpha + \upsilon_2}{4\upsilon_\alpha} f_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(\upsilon_\alpha + \upsilon_1) = 4\upsilon_\alpha + \upsilon_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\upsilon_\alpha + 4\upsilon_1 = 4\upsilon_\alpha + \upsilon_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{1}{4}}.$$

Β2.α. Σωστό το ii)

β. Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση η επιτάχυνση με την οποία στρέφεται ο δίσκος είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I}$$

Από το διάγραμμα που δόθηκε παρατηρούμε ότι μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 (όπου $\Sigma\tau = 0$) είναι $\Sigma\tau > 0$, οπότε ο δίσκος επιταχύνεται. Αμέσως μετά γίνεται $\Sigma\tau < 0$ οπότε ο δίσκος επιβραδύνεται. Έτσι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα επιτυγχάνεται τη χρονική στιγμή t_2 όπου είναι $\Sigma\tau = 0$.

Β3.α. Σωστό το ii)

β. Για τον φελλό που βρίσκεται στο σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού έχουμε:

$$|r_1 - r_2| = |\upsilon t_1 - \upsilon t_2| = \upsilon|t_1 - t_2| = \upsilon\Delta t = \lambda \cdot f \cdot \frac{T}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r_1 - r_2| = \frac{\lambda}{4} \quad (1)$$

Έτσι το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού αυτού είναι:

$$A_\Sigma = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\right| \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} A_\Sigma = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right| \Rightarrow A_\Sigma = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right| \Rightarrow A_\Sigma = 2A\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A_\Sigma = A\sqrt{2} \quad (2)$$

Επειδή το δεύτερο κομμάτι φελλού βρίσκεται στο μέσο Μ της απόστασης των δύο πηγών οι οποίες είναι συμφασικές, το πλάτος ταλάντωσης είναι $A_M = 2A \quad (3)$

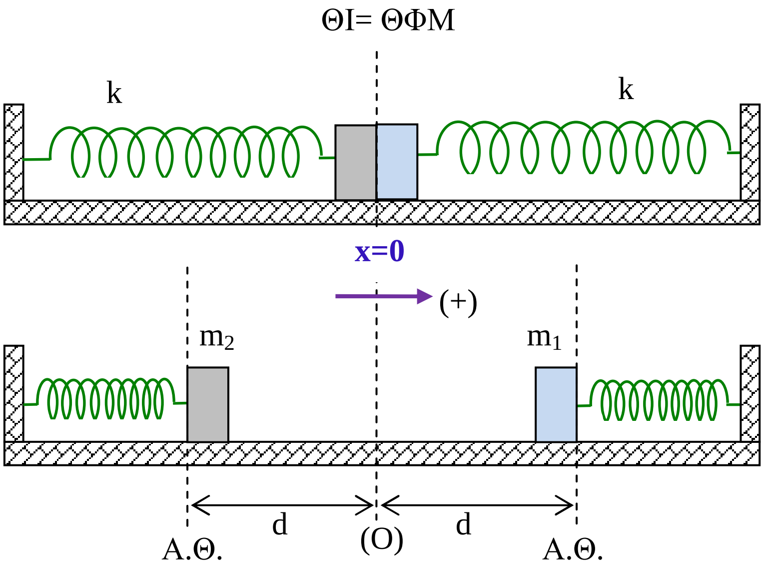
Επειδή οι φελλοί έχουν την ίδια μάζα και ταλαντώνονται με την ίδια κυκλική συχνότητα ω που ταλαντώνονται και οι πηγές, ο λόγος των ενεργειών των ταλαντώσεών τους είναι:

$$\frac{E_\Sigma}{E_M} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}D_\Sigma A_\Sigma^2}{\cancel{\frac{1}{2}}D_M A_M^2} \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \frac{E_\Sigma}{E_M} = \frac{\cancel{m}\cdot\cancel{\omega^2}\cdot(A\sqrt{2})^2}{\cancel{m}\cdot\cancel{\omega^2}\cdot(2A)^2} \Rightarrow \frac{E_\Sigma}{E_M} = \frac{2A^2}{4A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{E_\Sigma}{E_M} = \frac{1}{2}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Για την ταλάντωση του σώματος Σ_1 έχουμε:

$D_1 = k = 100\ N/m$.

$D_1 = m_1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow 100 = 1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = 10\ rad/s$.

$A_1 = d = 0{,}2\ m$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1 \eta\mu(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \text{Για } t = 0 \text{ είναι } x_1 = A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = A_1 \eta\mu\varphi_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}\ rad.$$

Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$\mathbf{x_1 = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\quad (S.I.)}$$

Ομοίως για την ταλάντωση του σώματος Σ_2 έχουμε:

$D_2 = k = 100\ N/m$.

$D_2 = m_2 \cdot \omega_2^2 \Rightarrow 100 = 4 \cdot \omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = 5\ rad/s$.

$A_2 = d = 0{,}2\ m$.

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = A_2 \eta\mu(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \text{Για } t = 0 \text{ είναι } x_2 = -A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow -A_2 = A_2 \eta\mu\varphi_2 \Rightarrow \eta\mu\varphi_2 = -1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}\ rad.$$

Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$\mathbf{x_2 = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)\quad (S.I.)}$$

Γ2. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για κάθε Α.Α.Τ. μέχρι τη στιγμή της κρούσης στη θέση $x = -\frac{d}{2} = -0{,}1\ m$ έχουμε:

Για το Σ_1: $K_1 + U_1 = E_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}m_1\upsilon_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}D_1x^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}D_1A_1^2 \Rightarrow \ 1\cdot\upsilon_1^2 + 100\cdot(-0{,}1)^2 = 100\cdot(0{,}2)^2 \Rightarrow$$

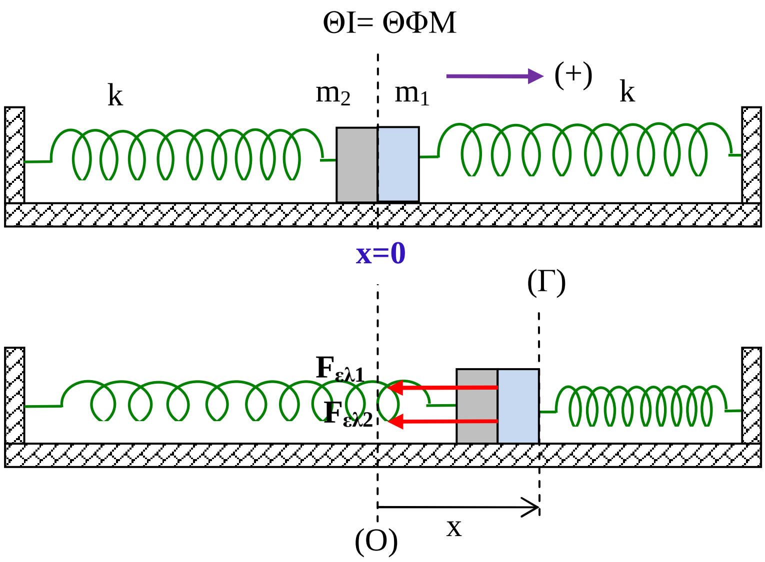
$$\Rightarrow \upsilon_1^2 + 100\cdot 0{,}01 = 100\cdot 0{,}04 \Rightarrow \ \upsilon_1^2 + 1 = 4 \Rightarrow \ |\boldsymbol{\upsilon_1}| = \sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{m/s}.$$

Για το Σ$_2$: $K_2 + U_2 = E_2 \Rightarrow \ \cancel{\tfrac{1}{2}}m_2\upsilon_2^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}D_2x^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}D_2A_2^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\cdot\upsilon_2^2 + 100\cdot(-0{,}1)^2 = 100\cdot(0{,}2)^2 \Rightarrow \ 4\upsilon_2^2 + 100\cdot 0{,}01 = 100\cdot 0{,}04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\upsilon_2^2 + 1 = 4 \Rightarrow \upsilon_2^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \ |\boldsymbol{\upsilon_2}| = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\ \mathbf{m/s}.$$

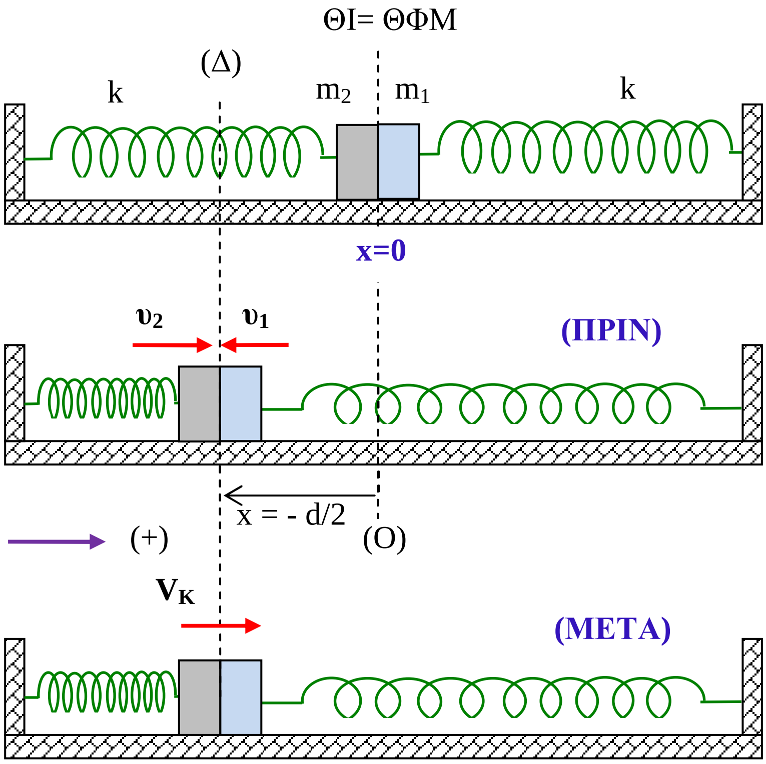
Γ3. Επειδή οικινήσεις γίνονται σε οριζόντιο επίπεδο η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι ίδια με την αρχική θέση ισορροπίας (Ο) των δύο σωμάτων. Έτσι στην τυχαία θέση (Γ) σε απομάκρυνση x έχουμε:



$$\Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda_1} - F_{\varepsilon\lambda_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma F_x = -kx - kx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma F_x = -2kx$$

Άρα είναι τη μορφής $\Sigma F_x = -Dx$ με $D = 2k = 200\ N/m$, οπότε η κίνηση του συσσωματώματος είναι Α.Α.Τ.

Γ4. Από τη διατήρηση της ορμής κατά την πλαστική κρούση στη θέση (Δ) προκύπτει:



$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \overset{(+)}{\Rightarrow} \; -m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)V_K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot(-\sqrt{3}) + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = (1+4)V_K \Rightarrow -\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot = 5V_K \Rightarrow \; V_K = \frac{\sqrt{3}}{5}\,\text{m/s}.$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$K_{(B)} + U_{(B)} = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}(m_1+m_2)V_K^2 + \cancel{\frac{1}{2}}Dx^2 = \cancel{\frac{1}{2}}DA^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+4)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + 200\cdot(-0{,}1)^2 = 200\cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot\frac{3}{25} + 200\cdot 0{,}01 = 200\cdot A^2 \Rightarrow \frac{3}{5} + 2 = 200\cdot A^2 \Rightarrow 2{,}6 = 200\cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1{,}3}{100} \Rightarrow \; A = \frac{\sqrt{1{,}3}}{10}\,\text{m}.$$

Έτσι το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος είναι:

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{max} = |F|_{max} = D \cdot A = 200 \cdot \frac{\sqrt{1,3}}{10} \Rightarrow \left|\frac{\mathbf{d\vec{p}}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathbf{max}} = \mathbf{20\sqrt{1,3}\ \ Kg \cdot m/s^2}.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $(KO) = (KB) - (OB) = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{4} \Rightarrow (KO) = \frac{1}{4}\,m.$

$(AO) = (AB) - (OB) = \ell - \frac{\ell}{4} = \frac{3\ell}{4} \Rightarrow (AO) = \frac{3}{4}\,m$

Για τη ροπή αδράνειας της ράβδου με τη βοήθεια του θεωρήματος Steiner έχουμε:

$$I_\rho = I_{cm} + M \cdot (KO)^2 \Rightarrow I_\rho = \frac{1}{12} \cdot M \cdot \ell^2 + M \cdot (KO)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_\rho = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow I_\rho = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \Rightarrow I_\rho = \frac{7}{16}\,Kgm^2.$$

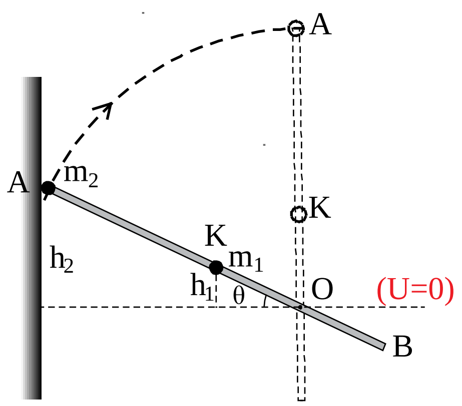
Έτσι η ροπή αδράνεια I του συστήματος ράβδου – σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής είναι:

$$I = I_\rho + I_{m_1} + I_{m_2} \Rightarrow I = I_\rho + m_1 \cdot (KO)^2 + m_2 \cdot (AO)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{7}{16} + 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow I = \frac{7}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \Rightarrow \mathbf{I = \frac{17}{16}\,Kgm^2}.$$

Δ2. Βρίσκουμε εκείνη την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω_2, έτσι ώστε το σύστημα ράβδου – σφαιριδίων να φθάσει στην κατακόρυφη θέση και να σταματήσει.

Ορίζουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας (U = 0) το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από τον άξονα περιστροφής O.



Είναι:

$$h_1 = (KO) \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{4} \cdot 0,83 \Rightarrow h_1 = \frac{0,83}{4}\,m$$

και $h_2 = (AO) \cdot \eta\mu\theta = \frac{3}{4} \cdot 0,83 \Rightarrow h_2 = \frac{2,49}{4}\,m$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = \cancel{K_{\tau\varepsilon\lambda}} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 + m_1 \cdot g \cdot h_1 + M \cdot g \cdot h_1 + m_2 \cdot g \cdot h_2 =$$

$$= m_1 \cdot g \cdot (KO) + M \cdot g \cdot (KO) + m_2 \cdot g \cdot (AO) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\omega_2^2+1\cdot 10\cdot\frac{0{,}83}{4}+3\cdot 10\cdot\frac{0{,}83}{4}+1\cdot 10\cdot\frac{2{,}49}{4}=$$

$$=1\cdot 10\cdot\frac{1}{4}+3\cdot 10\cdot\frac{1}{4}+1\cdot 10\cdot\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{17}{32}\cdot\omega_2^2+\frac{8{,}3}{4}+\frac{24{,}9}{4}+\frac{24{,}9}{4}=\frac{10}{4}+\frac{30}{4}+\frac{30}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{17}{32}\cdot\omega_2^2+\frac{58{,}1}{4}=\frac{70}{4}\Rightarrow\frac{17}{32}\cdot\omega_2^2=\frac{11{,}9}{4}\Rightarrow\frac{17}{8}\cdot\omega_2^2=11{,}9\Rightarrow\omega_2^2=\frac{95{,}2}{17}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega_2=\sqrt{5{,}6}\ \mathrm{rad/s}}.$$

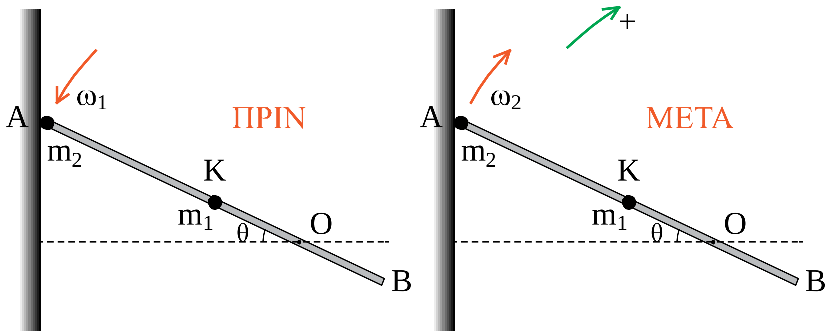
<u>Παρατήρηση</u>: Με την τιμή της ω_2 που υπολογίσαμε, δεν γίνεται ανακύκλωση γιατί το σύστημα σταματά στην κατακόρυφη θέση. Για ανακύκλωση πρέπει η ω_2 να είναι λίγο μεγαλύτερη από $\sqrt{5{,}6}\ \mathrm{rad/s}$. Συνηθίζουμε όμως να λέμε ότι με αυτή την τιμή της ω_2 εκτελεί οριακά ανακύκλωση.

Δ3. Έστω ότι πριν τη κρούση το σύστημα χτυπάει στον κατακόρυφο τοίχο με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Από το ποσοστό απωλειών κινητικής ενέργειας που δόθηκε έχουμε:

$$\frac{K_{\pi\rho\iota\nu}-K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}}100\%=75\%\Rightarrow\frac{K_{\pi\rho\iota\nu}-K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}}=\frac{75}{100}\Rightarrow\frac{K_{\pi\rho\iota\nu}-K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$3K_{\pi\rho\iota\nu}=4K_{\pi\rho\iota\nu}-4K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\Rightarrow K_{\pi\rho\iota\nu}=4K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_1^2=4\cdot\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_2^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega_1^2=4\omega_2^2\Rightarrow\omega_1=2\omega_2\quad(1)$$



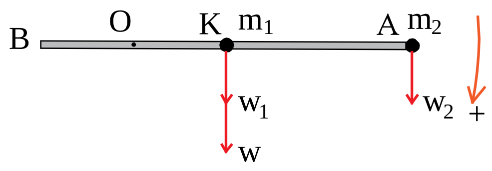
Έτσι η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος κατά την κρούση με τον τοίχο ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$d\vec{L}=\vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}-\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu}\Rightarrow dL=I\cdot\omega_2-(-I\cdot\omega_1)\Rightarrow dL=I\cdot(\omega_1+\omega_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow dL=I\cdot(2\omega_2+\omega_2)\Rightarrow dL=3\cdot I\cdot\omega_2\Rightarrow dL=3\cdot\frac{17}{16}\cdot\sqrt{5{,}6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{dL=\frac{51\sqrt{5{,}6}}{16}\ \mathrm{Kgm^2/s}}.$$

Δ4. Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του συστήματος έχουμε:



$$\Sigma\tau_{(O)} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w \cdot (KO) + w_1 \cdot (KO) + w_2 \cdot (AO) = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot g \cdot (KO) + m_1 \cdot g \cdot (KO) + m_2 \cdot g \cdot (AO) = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{16} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30}{4} + \frac{10}{4} + \frac{30}{4} = \frac{17}{16} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{70}{4} = \frac{17}{16} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{280}{17}\, rad/s^2.$$

Έτσι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της m_2 είναι:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = I_{m_2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = m_2 \cdot (AO)^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{280}{17} \Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{280}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{280}{17} \Rightarrow \mathbf{\left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = \frac{630}{68}\, Kgm^2/s^2}$$